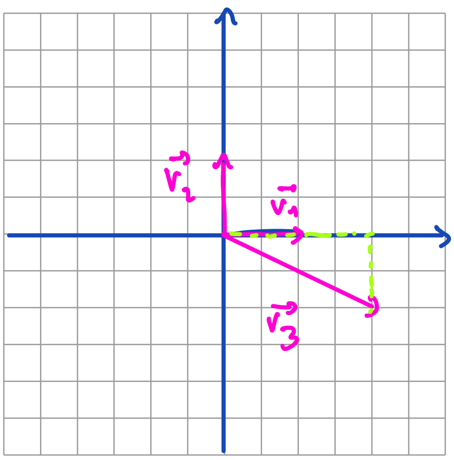
1.7 Indépendance linéaire

Définition 17 (famille linéairement(in-)dépendante)**.**
Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de $\mathbb{R}^n$ est *linéairement indépendante* ou *libre* si l'unique solution de

$$\underline{x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_p\vec{v}_p} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$$

est le vecteur nul $\vec{0} \in \mathbb{R}^p$. Sinon on dit que la famille est *linéairement dépendante* ou *liée*.

Exemple $\quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$



• famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la famille est lin. indép. (ou libre)

• famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$:

$$\underline{\vec{v}_3 = 2\,\vec{v}_1 - \vec{v}_2}$$

d'où $2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}$

Donc on a la sol. non triviale

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow$ la fam. est lin. dép. (ou liée)

<u>exercice :</u> qu'en est-il des familles $(\vec{v}_1, \vec{v}_3)$ et $(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$, ou $(\vec{v}_1)$?

Cas particuliers

1) $(\vec{v}) \in \mathbb{R}^n$ est une famille linéairement indépendante si et seulement si

$$x\vec{v} = \vec{0}$$

n'admet que la solution triviale $x = 0$. Ceci est équivalent à $\vec{v} \neq \vec{0}$

(sinon il y aurait une infinité de sol. non triviales pour $x \in \mathbb{R}^*$)

2) Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

En effet, si $(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p})$ est une famille avec $\vec{v_j} = \vec{0}$ pour $1 \leq j \leq p$, alors on peut prendre $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ ← j^e ligne $* \neq 0$

$$x_1\vec{v_1} + \dots + x_j \underbrace{\vec{v_j}}_{\vec{0}} + \dots + x_p\vec{v_p} = \vec{0}$$

↳ $* \, \vec{v_j} = \vec{0}$

3) $(\vec{v_1}, \vec{v_2}) \in \mathbb{R}^n$ est linéairement dépendante si et seulement si

$$x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} = \vec{0} \quad (*)$$

admet une solution non triviale.

Supposons que $x_1 \neq 0$. Alors $\vec{v_1} = \underbrace{\left(-\frac{x_2}{x_1}\right)}_{\in \mathbb{R}} \vec{v_2}$,

donc $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont proportionnels, donc ils ont la même direction.

Définition 18 (vecteurs colinéaires)**.**
Soient $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{R}^n$. Ils sont dits *colinéaires* s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v_1} = \mu\vec{v_2}$.

On a le résultat suivant : $(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est lin. dép.

$\Leftrightarrow$ $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont colinéaires.

Etude de la dépendance linéaire d'une famille de vecteurs

Méthode 1

Soit $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ de $\mathbb{R}^n$ une famille de vecteurs. On peut l'écrire sous la forme d'une matrice A de taille $n \times p$

$$A = (\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_p)$$

p colonnes
n lignes

Alors la famille est linéairement indépendante si et seulement si $A\vec{x} = \vec{0}$ admet uniquement la solution triviale.

Pour étudier si c'est le cas, on échelonne la matrice et on regarde s'il y a des variables libres.

- Si oui, la famille est lin. dép. (liée !)
- Si non, la " est " indép. (libre !)

Théorème 7. *Les colonnes d'une matrice sont linéairement indépendantes si et seulement si l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale.*

A $m \times n$

Preuve

$A = (\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n)$ avec $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^m$

la fam. $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ est lin. indép

$\Leftrightarrow$ $x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{0} \in \mathbb{R}^m$ n'admet que la sol. triviale

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{(\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n)}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m$ n'admet que la sol. triviale

$\Leftrightarrow$ $A\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m$ n'admet que la sol. triviale.

$\rightsquigarrow$ il y a un lien avec les syst. homogènes.

Exemple $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix} \right)$ est-elle libre ou liée ?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{array}\right)$$

il y a 3 pivots, et aucune variable libre. !!!

$\Rightarrow$ la famille est libre

Méthode 2 "observation"

Exemple $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}}_{\text{colinéaires}}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$1 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ sol. non triviale $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right)$ est lin. dép.

Théorème 8. *Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ de $\mathbb{R}^n$ avec $p \geq 2$ est linéairement dépendante si et seulement si au moins l'un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs restants.*

Preuve $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ lin. dép

$\Leftrightarrow$ $x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_p \vec{v}_p = \vec{0}$ a une sol. non triviale

$\Leftrightarrow$ il existe $1 \leq i \leq p$ avec $s_i \neq 0$ et

$$s_1 \vec{v}_1 + \dots + s_i \vec{v}_i + \dots + s_p \vec{v}_p = \vec{0} \qquad (*)$$

$\Leftrightarrow$ il existe $1 \leq i \leq p$ avec $s_i \neq 0$ et

$$\vec{v}_i = \frac{1}{s_i} \cdot \left(-s_1 \vec{v}_1 - \dots - s_{i-1} \vec{v}_{i-1} - s_{i+1} \vec{v}_{i+1} - \dots - s_p \vec{v}_p \right)$$

$\Leftarrow$ il existe $1 \leq i \leq p$ tel que $\vec{v}_i$ soit une comb. lin de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \dots \vec{v}_p$.

Exemple (précédent)

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \,?\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \,?\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ liée

Théorème 9. *Toute famille $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendante si $p > n$.*

Preuve (idée) : $\underset{n \times p}{A} = (\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_p)$ p colonnes, n lignes

la matrice A a plus de colonnes que de lignes, elle est rectangulaire de la forme $\boxed{}$.

On échelonne et on étudie le nbre de pivots (entre 0 et n)

0 pivot : infinité de sol.

n pivot : 1 pivot par ligne ⇒ il y a forcément une var. libre car au moins 1 colonne n'a pas de pivot.

0 < # pivots < n : il y a $\underbrace{n - \#\text{pivots}}_{>0}$ lignes de zéros

⇒ il y a au moins une var. libre.

Bases de $\mathbb{R}^n$

Définition 19 (base de $\mathbb{R}^n$)**.**
Une famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ de $\mathbb{R}^n$ est une *base* de $\mathbb{R}^n$ si

1) $\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\} = \mathbb{R}^n$ (*)

2) la famille $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ est lin. indépendante.

Remarques

(*)

1) On dit aussi que la famille $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ de $\mathbb{R}^n$ engendre $\mathbb{R}^n$, ou que $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$ est un système de générateurs de $\mathbb{R}^n$.

2) Lien entre p et n :

- On a forcément $p \leq n$ car la famille est lin. indép. (th. 9)
- Si $p < n$, alors la forme échelonnée de $A = (\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_p)$ est du type

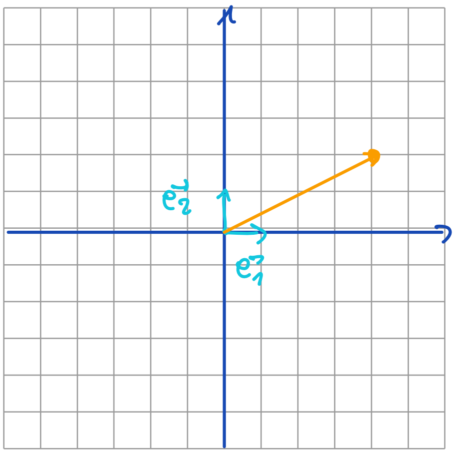
$$n\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}}_{p}\right.$$

au mieux on a p pivots, donc il n'y a pas un pivot par ligne et par le th. 5, $\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\} \neq \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{p = n}}$

⚠ Cette condition n'est pas suffisante !

Exemple : Base canonique de $\mathbb{R}^2$



$(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ avec $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, on a

$\vec{b} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 \vec{e_1} + b_2 \vec{e_2} \quad (*)$

$\Rightarrow$ syst. de gén.

- $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ famille libre.

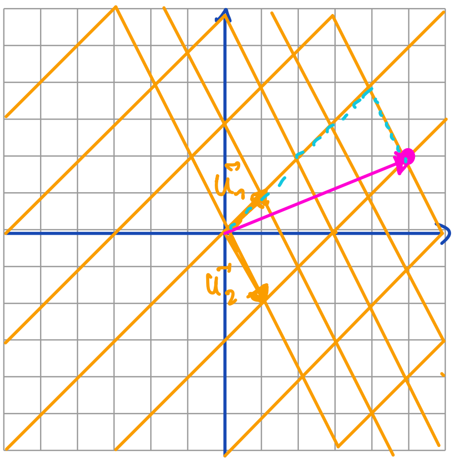
$(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est dite base canonique car les coeff. de la comb. lin. $(*)$ correspondent aux composantes de $\vec{b}$.

Il y a d'autres bases : $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ $\quad \vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ $\quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & -2 & b_2 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2b_1+b_2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{b_1-b_2}{3} \end{array}\right)$

donc $\quad \vec{b} = \frac{2b_1+b_2}{3} \vec{u_1} + \frac{b_1-b_2}{3} \vec{u_2}$

Remarque Toute famille de 2 vect. lin. indép. forme une base de $\mathbb{R}^2$.



$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$

$= 4\vec{u_1} + 1\vec{u_2}$

<u>Base canonique de $\mathbb{R}^n$:</u> $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ avec

$\vec{e_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^e$ ligne

est une base de $\mathbb{R}^n$, appelé base canonique.